线性代数　中国科学技术大学 2023 春
初等矩阵

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定理

1. 对矩阵做初等行变换相当于矩阵左乘一个相应的初等方阵.
2. 对矩阵做初等列变换相当于矩阵右乘一个相应的初等方阵.

证明思路: 将矩阵写成由向量组成的分块矩阵, 然后直接验证.

性质 (初等矩阵总是可逆的，且其逆仍然是初等矩阵)

1. S_{ij} 对称且 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$;
2. $D_i(\lambda)$ 为对角阵且 $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$;
3. $T_{ij}(\lambda)$ 为三角阵, 且 $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$;

特别地，由于可逆矩阵的乘积仍然可逆，我们有任意有限多个初等矩阵的乘积也是可逆的.

定理

对于任意矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在 m 阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 n 阶初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 r 为非负整数.

推论

对于任意矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

推论

设 A 为 n 阶方阵. 则 A 可逆当且仅当 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积.

推论

设 A 为 n 阶可逆方阵. 则

1. 可对 A 做一系列初等行变换变为最简形式 I.
2. 可对 A 做一系列初等列变换变为最简形式 I.

初等变换求逆

- 算法原理: 通过初等变换我们可以找到初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = I$. 从而, 我们有

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1.$$

- 具体实现过程: 对矩阵 (A, I) 做行初等变换, 将第一个子矩阵变为单位阵. 则第二个子矩阵自动变为 A 的逆.

$$(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} P_s \cdots P_2 P_1 (A, I) = (I, A^{-1}).$$

分块矩阵的行列变换

设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 我们将其按 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ 和 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ 的拆分方式, 得到如下分块形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{r \times s}.$$

类似于矩阵的初等变换, 我们可以对分块矩阵 A 做相似的操作:

1. 交换分块矩阵的第 i, j 行 (或 i, j 列).
2. 将分块矩阵的第 i 行左乘一个 n_i 阶 (或, 第 i 列右乘一个 m_i 阶) 可逆矩阵.
3. 将分块矩阵的第 i 行左乘一个 $n_i \times n_j$ 矩阵加到第 j 行 (或, 第 i 列右乘一个 $m_i \times m_j$ 矩阵加到第 j 列).

例

若 A 可逆，则

$$
\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}
$$

例

设 A, B, I 为 n 阶方阵满足 $BA = 0$. 则

$$
\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I + AB & -A \\ -B & I \end{pmatrix}
$$

定义 (相抵)

称两矩阵 A, B 相抵, 若存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$B = PAQ.$$

注: 因可逆矩阵为方阵, 因此要使 $B = PAQ$ 成立, B 和 A 的行列数必须一致.

性质 (相抵的基本性质)

1. 任意矩阵与自身相抵;
2. 若 A 与 B 相抵, 则 B 与 A 也相抵;
3. 若 A 与 B 相抵且 B 与 C 相抵, 则 A 与 C 相抵.

满足上述三条性质的关系称为等价关系。换句话说，上述性质表明相抵为等价关系. 对等价关系, 我们有如下通俗理解:

定理

给定集合某上的一个等价关系等价于给定这集合上的一个拆分.

基本问题:

1. 如何判定两个矩阵是否相抵?
2. 在每个等价类中有没有最简单的表达形式?

定理

对于任意矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中非负整数 r不依赖于 P 和 Q 的选取.

定义

定理中的 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称为 A 的相抵标准形. 非负整数 r 称为 A 的秩, 记为$\mathrm{rank}(A)$或$r(A)$. 若 $r = m$, 则称 A 为行满秩. 若 $r = n$, 则称 A 为列满秩.

相抵判定

推论 (相抵判定)

给定两矩阵 $A, B \in F^{m\times n}$, 则 A 与 B 相抵当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

推论

若 P, Q 可逆, 则 $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(A)$.

例

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A).$$

例

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

性质

设 $A \in F^{m\times n}$, P, Q 分别为 m, n 阶初等方阵. 若 A 的 k 阶子式全为零, 则 PA 和 AQ 的所有 k 阶子式全为零.

性质 (秩的内蕴定义)

若矩阵 A 至少有一个 r 阶非零子式, 且 A 的所有 $r+1$ 阶子式都为零, 则 $\mathrm{rank}(A) = r$.

例题

例

求 n 阶方阵 $\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ 的秩.

例

求 n 阶方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

例

每个非零矩阵都为一个列满秩矩阵和一个行满秩矩阵的乘积.

例

每个秩为 r 的矩阵都可以写成 r 个秩为 1 的矩阵的和.

例

若 A 为列满秩 $m \times n$ 矩阵, 则 A 为某个 m 阶可逆阵的前 n 列.
若 A 为行满秩 $m \times n$ 矩阵, 则 A 为某个 n 阶可逆阵的前 m 列.

例

设矩阵 A 的列数和矩阵 B 的行数为 n, 则

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n\le\operatorname{rank}(AB)\le\min\Big(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\Big).$$

例

若 A 为 n 阶方阵满足 $A^2=A$, 则 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$.

例

设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$. 则

$$m+\operatorname{rank}(I_n-BA)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}=m+\operatorname{rank}(I_m-AB).$$